

# 超導量子干涉儀

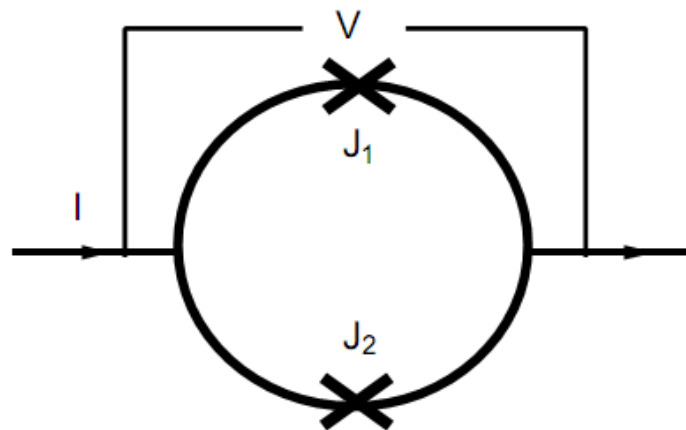
## 【目的】

利用超導量子干涉元件 (Superconducting QUantum Interference Device, 簡稱SQUID) 量測極微小之磁場變化 ( $10^{-10} \sim 10^{-15}$  Tesla, 約為地磁十億分之一)。

## 【原理】

利用超導環路中之磁通量為量子化及約瑟芬接合點 (Josephson Junction) 限制超導電流等效應所製出之超導元件, 依結構的不同可分為: 由一個約瑟芬元件組成的射頻超導量子干涉儀 (Radio Frequency Superconducting Quantum Interference Device, 簡稱 RF-SQUID) 以及由兩個約瑟芬元件並聯而成的直流超導量子干涉儀 (Direct Current Superconducting Quantum Interference Device, 簡稱 DC-SQUID)。實驗所用的是由美國 Conductus 公司針對教學推出的 Mr. SQUID, 屬於 DC-SQUID。而 DC SQUID 的工作原理主要根據約瑟夫森效應 (Josephson Effect) 及磁通量子化而產生。

DC SQUID 為包含兩個約瑟夫生接點之超導環形電路, 如下圖所示。



圖一、DC SQUID 示意圖

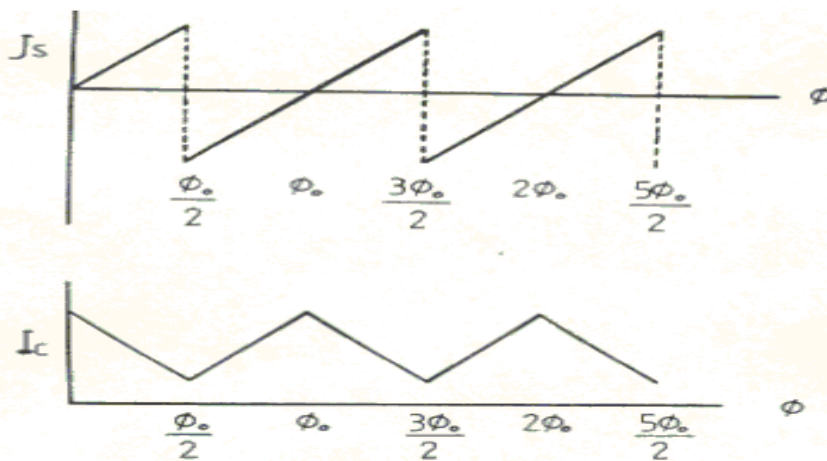
約瑟芬效應 (Josephson Effect) 是在1962年由年僅22歲的大學畢業生布萊恩·大衛·約瑟芬 (Brian David Josephson) 預測的, 而他也因此而於1973年成為諾貝爾物理獎得主。構成SQUID的約瑟芬元件中的基礎原理: 在由兩塊超導體與一層絕緣體構成的約瑟芬元件中, 當兩超導體中隔絕的絕緣體厚度薄到數埃 (Angstrom, Å) 的程度時, 由於超導電子對 (Cooper Pair, 或譯作古柏對) 發生的穿隧效應 (Quantum tunneling effect), 絕緣體將無法阻隔電子的傳遞, 使得兩塊超導體出現約瑟芬電流 (Josephson Current), 並符合以下之方程式:

$$U(t) = \frac{h}{2e} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad I(t) = I_c \sin(\phi(t))$$

其中  $U(t)$  與  $I(t)$  分別代表電壓及電流,  $\phi(t)$  是兩個超導體波函數的相位差, 即  $\phi_1 - \phi_2$ ; 而  $I_c$  為一常數, 是此約瑟芬元件的臨界電流 (Critical Current), 會受外在磁場及溫度改變。當通過約瑟芬元件的電流大於  $I_c$  時, 元件會產生電壓  $U$ , 而符合第一個式子。其中  $\frac{h}{2e}$  是磁通量子 ( $\Phi_0$ ), 同時也是約瑟芬常數 (Joseph Constant,  $K_J$ ) 的倒數, 約等

於  $2.07 \times 10^{-15}$  韋伯 (Wb) 或者  $2.07 \times 10^{-7}$  馬克士威 (Mx)，而此一數值亦預告了SQUID的敏感性。

所謂磁通量子化是指當磁通量通過一個超導體形成的迴路時，並非任意值的磁通都可以穿過，它必須是  $h/2e$  之倍數。亦即  $\Phi = n h/2e$ ， $\Phi$  是磁通量， $h$  是普郎克常數， $e$  是電子電荷，而  $h/2e = 2.067 \times 10^{-15}$  韋伯 (Tesla  $\cdot$  m<sup>2</sup>) 我們把這個量稱為磁通量子(Magnetic Flux Quantum)以  $\Phi^0$  來表示。一個 DC SQUID 包含了兩個對稱的約瑟夫森接合點之超導環形電路，這兩個接合點是超導性較差之區域，因此這樣聯結之方式，我們稱之為弱聯結(Weak-Linked)。



圖二、屏蔽電流  $J_s$  與 SQUID 臨界電流  $I_c$  與外加磁通之關係

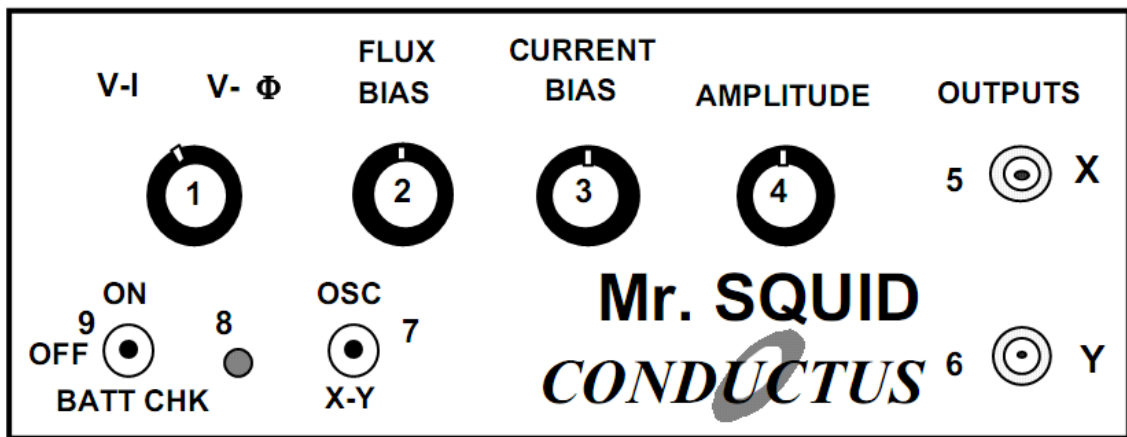
量子效應之表現當外加磁通量從零增加至  $\frac{1}{2} \Phi^0$  時，屏蔽電流  $J_s$  亦等比增加，當外加磁通量從  $\frac{1}{2} \Phi^0$  增加至  $1 \Phi^0$  時，屏蔽電流會反向增加使得迴路仍然維持整數個磁通量子，而外加磁通為整個  $\Phi^0$  時，屏蔽電流即消失。因此，屏蔽電流之大小為外加磁場的週期函數，其週期即為  $\Phi^0$ ，由於 SQUID 的超導電流為一定值，且為屏蔽電流  $J_s$  與臨界電流  $I_c$  之和，因此臨界電流  $I_c$  與外加磁場之關係也是呈現週期性，而當外加磁通量為  $\Phi^0$  之整數倍加  $\frac{1}{2}$  倍時，屏蔽電流為最大值，此時 SQUID 之臨界電流減至最小，圖二說明了此週期性關係，其中每一個週期即為一個磁通量子。

### 【方法】

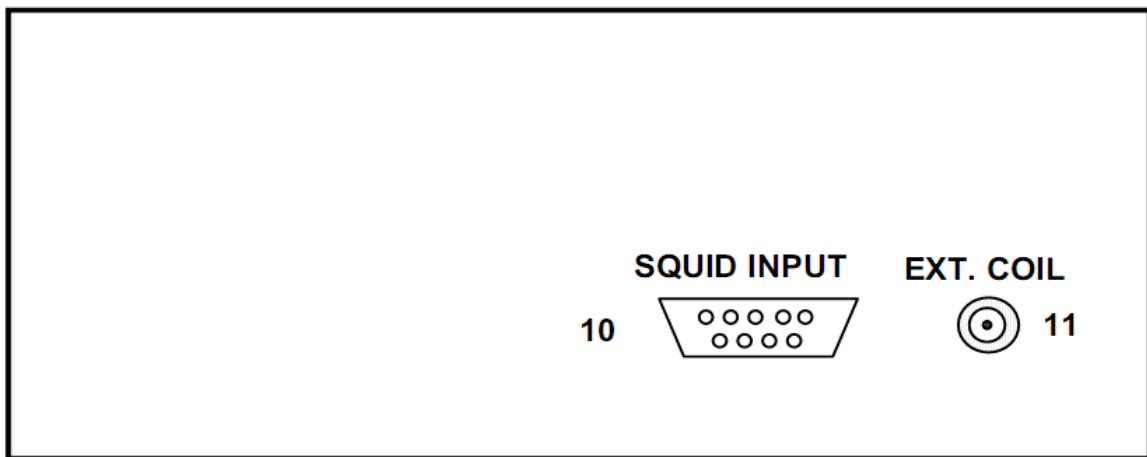
實驗中所採用的DC-SQUID，如前所述，是由兩個約瑟芬元件並聯而成。當於其兩端通以大於臨界電流 ( $I_c$ ) 的外加電流時，兩個約瑟芬元件會發生量子干涉 (Quantum Interference)，而使得電壓  $V$  對磁通量  $\Phi$  的改變非常敏感。若加上一定偏電流則會在其上產生一電壓值出現，加上鎖向放大器 (Lock-in Amplifier) 就可以對磁場進行測量。簡而言之，SQUID 便是一個磁場對電壓轉換器，可將所量到的磁場以電壓值輸出。

### 【儀器】

示波器一台、杜瓦瓶一個 (附黑色泡棉蓋子)、Mr. SQUID 探測器一支、傳輸線一條、電子控制盒一個、BNC-BNC 連接線 2 條、液態氮



圖三 電字控制器面版 (前)



圖四 電字控制器面版 (後)

### 【注意事項】

1. 實驗過程切勿打翻杜瓦瓶和以手觸摸液氮，以免凍傷。
2. 勿將口鼻靠近杜瓦瓶，以免吸入過量氮氣，造成缺氧。
3. 實驗開始前，請向助教領取 Mr. SQUID 探測器；實驗完畢，需‘當面’繳交給助教。
4. Mr. SQUID 探測器的市價約 73,000 元，請小心使用，切勿損毀其前端晶片。
5. 實驗過程若液氮不足 (液氮液面低於綠色晶片)，可自行添加。但，**嚴禁玩耍液氮和杜瓦瓶。**
6. 杜瓦瓶請‘輕舉輕放’，避免瓶內玻璃出現裂縫，散失其保溫功能。

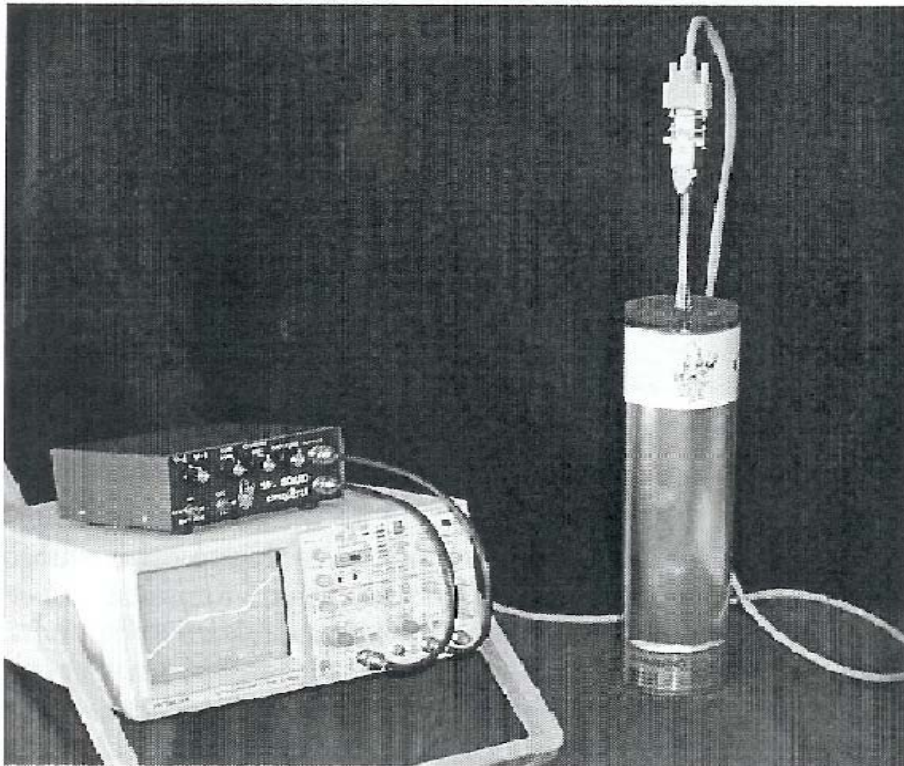
## 【步驟】

### (一) 前期準備

1. 將電子控制盒的 (9) 由 off (中間) 向下扳至 BATT CHK，觀察 (8) 的燈泡是否發亮。燈亮表示電池有電；燈不亮請告知助教更換電池。(方形 9V 電池 2 顆，位於盒子下方)
2. 將 Mr. SQUID 探測器的晶片端插入杜瓦瓶的液態氮中，並利用黑色泡棉夾住並固定 Mr. SQUID 探測器的位置，待數分鐘後，黑色泡棉將密封杜瓦瓶。

【註】請確認 Mr. SQUID 的前端晶片都能完全浸入液態氮中。

3. 待冷卻探測器後，將傳輸線的一端連接探測器，而另一端連結於電子控制盒的 (10)。
4. 以 BNC-BNC 連接線分別連結：1. 電子控制盒的 (5) 和示波器的 channel 1；2. 電子控制盒的 (6) 和示波器的 channel 2。如圖五所示



圖五 實驗裝置圖

註：圖中的 BNC-BNC 連接線需對調

### (二) 開始實驗：基本測量

#### 1. 設定輸出裝置：

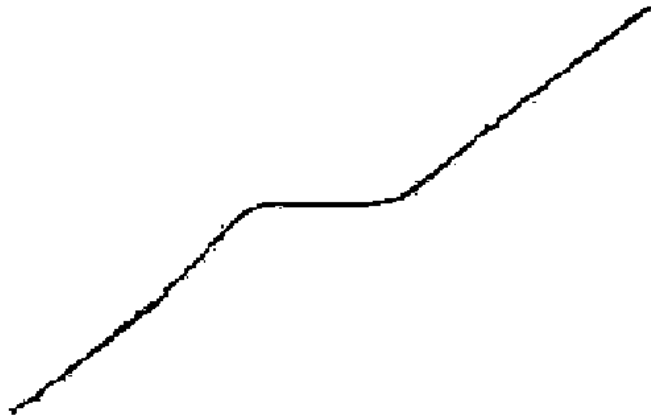
- (1) 調整示波器的電壓衰減開關為 CH1 為 0.2 VOITS/DIV，CH2 為 50mV/DIV。
- (2) 將電子控制盒的 (7) 扳向上，選擇 OSC(high speed)。
- (3) 確認電子控制盒有電後，將電子控制盒的 (4) 向左轉到底 (min)；電子控制盒的 (3) 和 (2) 轉至 12 點的位置 (mid)，開啟電源，即 (9) 向上扳至 on。
- (4) 將電子控制盒的 (1) 轉至 V-I 的位置，此時，電子控制器的 (5) 讀取到穿過 SQUID 電流值，而電子控制器的 (6) 讀取到穿過 SQUID 電壓值。此時的示波器上應該會有一個小的明亮點在螢幕的中心。

#### 2. 改變偏流

調整電子控制盒的 (3) 和 (4)，使示波器螢幕顯示出如下圖六所示的電壓—電流 (V-I)

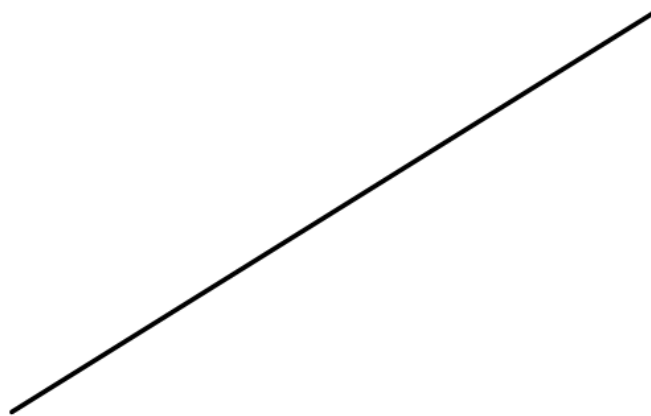
特性圖：其中水平部份為超導部份，兩旁為非超導的歐姆特性。這條曲線被稱為Mr. SQUID典型的V-I曲線。

註：示波器若看不到點或曲線，請自行調整X軸和Y軸的VOITS/DIV及POSITION。



圖六 典型的Mr. SQUIDV-I特性

若出現如下圖七所示的圖形，表示探測棒的溫度尚未達到出現超導性的低溫。



圖七 一直線的V-I特性

### 3. 改變電流掃瞄的振幅

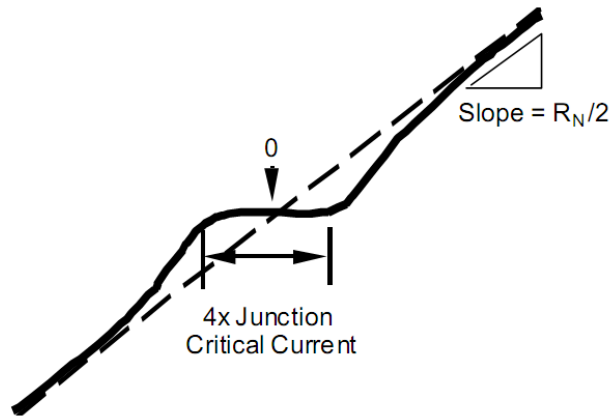
將電子控制盒的(3)轉回至12點的位置(mid)，緩慢地以順時針的方向轉動電子控制盒的(4)，觀察曲線的變化；反之，將電字控制盒的(4)向左轉到底(min)，緩慢地轉動電子控制盒的(3)，觀察曲線的變化。

### 4. 計算電流

因為穿過SQUID的電流值藉由通過電子控制器的(5)讀取並將該數值輸入示波器中顯示，而電子控制器內部有 $10,000\Omega$ 的電阻，故根據歐姆定律( $V=IR$ )，則流過電阻的電流為穿過SQUID的電壓值除以 $10,000\Omega$ 。

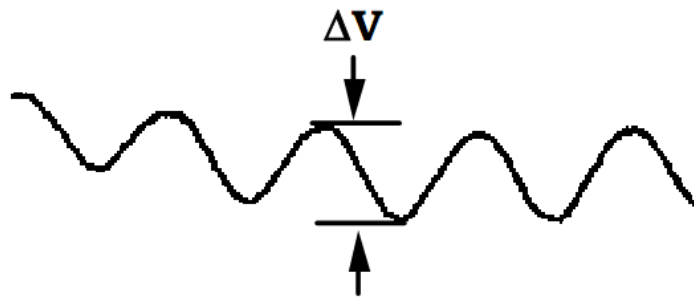
### 5. 調節Mr. SQUID的臨界電流

調整電子控制盒的(2)，使水平部分達最大，如下圖八所示，計算出Critical Current  $I_c$ 和 Normal-state Resistance  $R_N$ ，並得到 Characteristic Voltage  $I_c R_N$ 。



圖八 從V-I特性確定界面參數

將電子控制盒的(1)由V-I向右轉至V- $\Phi$ ，調整電子控制器的(2)(3)(4)和示波器的電壓衰減開關，則會出現如下圖九所示的電壓—磁通(V- $\Phi$ )特性圖，其中水平方向代表外加磁場，垂直方向為Modulation Depth  $\Delta V$ ，從示波器螢幕讀取出其數值。



圖九 Mr. SQUID 典型的電壓—磁通(V- $\Phi$ )特性圖

#### 【問題】

1. 何謂超導體？有哪些特性？何謂高溫超導？
2. 步驟3.中，曲線有何變化？
3. 探測器前端的晶片處為何鎖上一層黑色的空心圓柱體？
4. 將液態氮倒入杜瓦瓶或將探測器放入杜瓦瓶時，可以聽見如水沸騰的聲音，並看到液態氮飛濺出來，以及冒白煙的現象，試討論其原因為何？

#### 【參考資料】

1. Mr. SQUID User' s Guide
2. 高溫超導量子干涉元件多媒體教學系統之研究，林踐、黃瀛文著
3. 楊鴻昌教授，“最敏感的感測元件 SQUID 及其前瞻性應用”，物理雙月刊科學普及選輯；從奈米到宇宙，p135~p150，2005。
4. 超導量子干涉儀及其對植物磁場量測之應用與研究，宋俊育著，楊鴻昌教授指導。

【附錄】另外的（補充的）Mr. SQUID尺寸（測量）

Now that you can measure a variety of properties of the SQUID in the Mr. SQUID probe, you can determine a key parameter of the device, namely the  $\beta_L$  parameter. This is defined by

$$\text{Eqn. 3-1} \quad \beta_L = \frac{2I_c L}{\Phi_0}$$

where  $L$  is the inductance of the SQUID loop.

Earlier we mentioned that the maximum modulation voltage depth  $\Delta V$  as measured from the  $V-\phi$  curve is related to the  $I_c R_N$  product that can be determined from the  $V-I$  curve. As we will discuss in Section 5, this relationship can be expressed simply in terms of the  $\beta_L$  parameter.

$$\text{Eqn. 3-2} \quad \beta_L = \frac{4I_c R_N}{\pi \Delta V} - 1$$

The above expression provides a simple way to determine the  $\beta_L$  parameter empirically (*i.e.*, without knowing the inductance  $L$  of the SQUID). This expression is strictly correct only if the critical currents of the two junctions are equal and only if thermal noise effects are negligible.

Both of these are approximations for the junctions in your Mr. SQUID.

The inductance of the Mr. SQUID chip may be written as the sum of four terms,

$L = L_h + L_k + L_{sl} + L_j$ , where  $L_h$  is the inductance of the SQUID washer,  $L_{sl}$  is the inductance of the long slit in the washer,  $L_k$  is the small kinetic inductance of the washer (arising from the

“inertia” of the electrons), and  $L_j$  is the inductance of the Josephson junction bridges, which also

includes a small kinetic inductance contribution. For a square washer with outer side length  $D$  and a square hole with inner side length  $d$  such that  $d/D < 1$ ,  $L_h = 1.24 \mu_0 d$ . Using  $d = 24 \mu\text{m}$  for the Mr. SQUID washer,  $L_h = 37.7 \text{ pH}$ . For the washer, the slit inductance per unit length is  $0.38 \text{ pH}/\mu\text{m}$  (it would be slightly less if the modulation coils were superconducting rather than normal metal). The slit in the Mr. SQUID washer is  $33 \mu\text{m}$  from the inner hole to the outer edge of the washer. Then,  $L_{sl} = 12.5 \text{ pH}$ . The kinetic inductance of the washer is more difficult to determine precisely but is estimated to be about  $2 \text{ pH}$ . The inductance of the Josephson junction bridges is estimated to be about  $8 \text{ pH}$ , which includes the kinetic inductance contribution (the inductance per unit length of the bridges is much higher than  $0.38 \text{ pH}/\mu\text{m}$  because of the narrow width of the bridges). Thus, the total inductance is approximately  $L = 60 \text{ pH}$ .

In general, for an  $N$ -turn coil integrated on top of the Mr. SQUID washer, the mutual inductance is given by

$$\text{Eqn. 3-3} \quad M = N [ L_h + L_k + 0.5 ( L_{sl} + L_j ) ]$$

For Mr. SQUID, the single-turn modulation coil actually goes around only three quarters of the washer (see Figure 3-6). Then, using  $N = 0.75$  as a rough approximation along with the inductance values given above,  $M = 37 \text{ pH}$ .

The horizontal axis of the  $V-\Phi$  curve measures the current through the modulation coil, and this is linearly related to the magnetic flux in the SQUID. The current gain in the Mr. SQUID control box

is 10,000 V/A (*i.e.*, 1 Volt =  $10^{-4}$  Amperes). The period of the modulation of the magnetic flux in the Mr. SQUID loop is the flux quantum,  $\Phi_0$  ( $2.07 \cdot 10^{-15}$  Wb in MKS units.)

By measuring the amount of current ( $\Delta I$ ) in the coil that is required to produce a change of one fluxon through the hole of the SQUID, you can determine the mutual inductance ( $M$ ) of the SQUID, using the following formula:

Eqn. 3-4 
$$M = \frac{\Phi_0}{\Delta I}$$

You can find the value of  $\beta_L$  for the SQUID in your Mr. SQUID probe using Eqn. you're your measurement of  $I_C$ , and  $L \approx 60$  pH. From the measured values of  $I_C$  and  $\Delta V$ , you can calculate  $\beta_L$  using Eqn. 3-2. Compare these two values. Do they agree?

The fact that the values calculated using Eqn. 3-1 and Eqn. 3-2 do not agree was a mystery for a number of years after the 1986 discovery of high- $T_C$  materials, as these equations worked quite well for SQUIDs made using traditional low- $T_C$  materials. This lack of agreement was resolved in 1993 with the recognition that thermal effects were playing a large role in the behavior of high- $T_C$  SQUIDs. The lack of agreement between Eqn. 3-1 and Eqn. 3-2 is in large part due to the fact that the Mr. SQUID is at a relatively high temperature where thermal energies ( $k_B T$ ) are no longer small compared to the energy of a flux quantum ( $\Phi_0^2/L$ ). The relationship between the observed voltage modulation and  $\beta_L$  at a nonzero temperature  $T$  changes Eqn. 3-2 to :

Eqn. 3-5 
$$\beta_L = \frac{4I_C R_N}{\pi \Delta V} \left( 1 - 3.57 \frac{\sqrt{k_B T L}}{\Phi_0} \right) - 1$$

Figure 3-9 illustrates the differences between the  $\beta_L$  values calculated using Eqn. 3-1, Eqn. 3-2, and Eqn. 3-5.

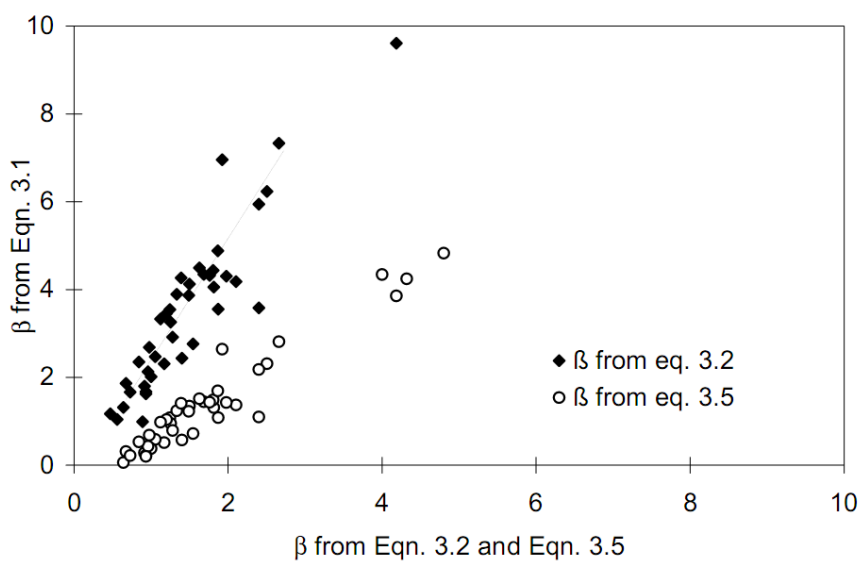


Figure 3-9 Values of  $\beta = 2I_C L/\Phi_0$  versus measurements of  $\beta_L$  based upon  $I_C R_N/\Delta V$  for 44 Mr.SQUID probes.



As one can see from Figure 3-9, the method of calculating  $\beta_L$  that takes thermal effects into account agrees quite well with the inductive  $\beta_L$  measurements.

On the following page, we include a data sheet for your SQUID. You may wish to use it (or better still, a photocopy) to enter your measurements on Mr. SQUID. An interesting and important issue for SQUID applications is how the SQUID sensor varies with age. You can track this with Mr. SQUID by filling out a copy of the data sheet each time you use the system.

# 超導量子干涉儀—進階實驗

## 【目的】

在了解超導量子干涉儀的用途後，利用該實驗裝置進行其他物質的磁通量測量。

## 【儀器】

示波器一台、杜瓦瓶一個（附黑色泡棉蓋子）、Mr. SQUID 探測器一支、傳輸線一條、電子控制盒一個、BNC-BNC 連接線 2 條、液態氮、冷凍小瓶、高低溫用膠帶、強力磁鐵

## 【材料】

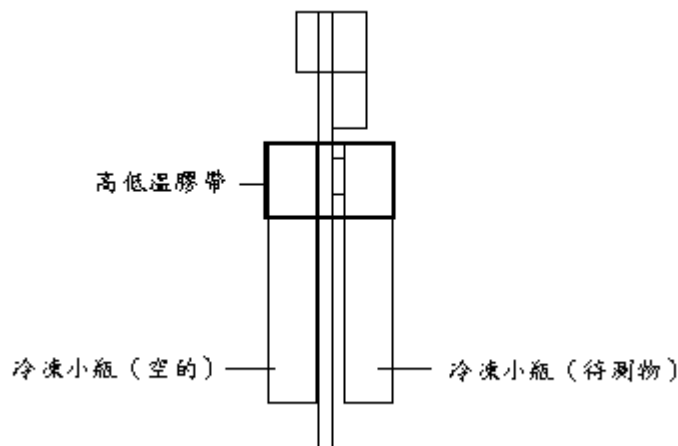
同學自行尋找，固體、液體、氣體都可以。請自備 3 個。

## 【注意事項】

1. 切勿直接以手碰觸探測器，特別是金屬部分，以免凍傷，凍傷會痛。（助教有切身經驗）
2. 冷凍小瓶一個台幣 17.6 元，請愛惜使用，勿任意丟棄。

## 【步驟】

1. 將探測器前端晶片處的黑色空心圓柱體卸下，取而代之的屏蔽金屬小心放入杜瓦瓶中。  
註：螺絲鎖回原處，以免不見，此螺絲為美國尺寸，國內不生產也不販賣。
2. 將待測物裝入冷凍小瓶中，並將旋蓋鎖上。（請確實鎖緊，以免汙染液態氮）
3. 將冷凍小瓶站立於強力磁鐵上方約 1 分鐘，將待測物磁化。
4. 如下圖所示，將冷凍小瓶以高低溫用膠帶繞黏在探測器上  
註：請小心並適當的將冷凍小瓶黏貼在探測器上，避免脫落，也切勿損壞晶片。



5. 重複（二）的實驗步驟，測量並算出待測物的磁通量。
6. 重複步驟 1. 2. 3. 4.，將待測物一一側量並算出未知樣品的磁通量。
7. 將使用過的冷凍小瓶清洗乾淨後，放在桌上風乾，再由助教收回。

## 【問題】

1. 根據實驗結果，比較哪一種物質的磁通量大？哪一種物質的磁通量小？為什麼？