

線偏振、圓偏振及橢圓偏振

【目的】

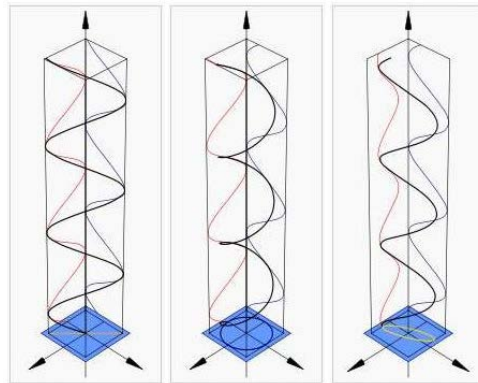
1. 認識光的偏振性和偏振光的種類，並學習利用偏振器製造偏振光。
2. 學習並驗證 Malus' s Law。
3. 觀察 $\frac{\lambda}{2}$ 波片和 $\frac{\lambda}{4}$ 波片對線偏振光的作用。

【原理】

光是電磁波，而電磁波是一種橫波，電磁場的振動方向與波的前進方向垂直。若電場 E 被限制在某一些方向上振盪，稱為光的偏振化，電場振動方向稱為光的偏振方向。

1. 偏振光的種類

沿 z 方向傳播的波動方程的通解可表示為沿 x 、 y 方向振動的兩個獨立場分量的線性組合，即 $E = iE_x + jE_y$ ，其中 $E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \varphi_x)$ 、 $E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi_y)$ 表示傳播方向相同、振動方向相互垂直、有固定相位差的兩束線偏振光。根據空間任一點光電場 E 的向量末端在不同時刻的軌跡不同，可分為線偏振光 (linear polarized light)、圓偏振光 (circular polarized light)、橢圓偏振光 (elliptical polarized light)，如圖一所示。



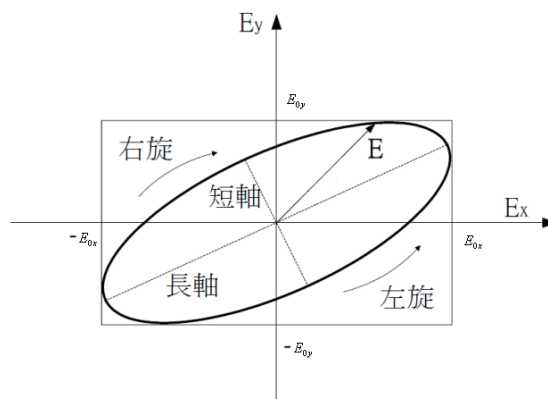
圖一 線偏振光、圓偏振光、橢圓偏振光

(1) 橢圓偏振光 (elliptical polarized light)

將 $E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \varphi_x)$ 和 $E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi_y)$ 消去 $(\omega t - kz)$ ，經過運算

$$\text{可得} \left(\frac{E_x}{E_{0x}} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}} \right)^2 - 2 \left(\frac{E_x}{E_{0x}} \right) \left(\frac{E_y}{E_{0y}} \right) \cos \varphi = \sin^2 \varphi, \quad \varphi = \varphi_y - \varphi_x \dots \dots (1)$$

在垂直於傳播方向的平面內，公式 (1) 為二元二次方程，表示的幾何圖形是橢圓，稱為橢圓偏振光，其電向量的大小和方向都隨時間變化，如圖二所示。

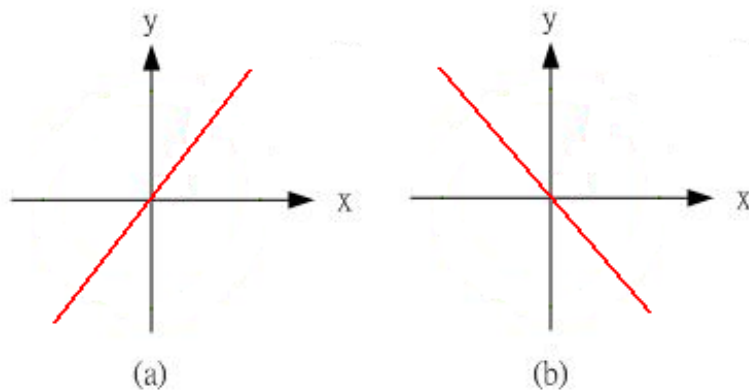


圖二 橢圓偏振光的電場向量圖

根據電向量的旋轉方向不同，可將橢圓偏振光分為右旋橢圓偏振光 (right-hand elliptical polarized light) 和左旋橢圓偏振光 (left-hand elliptical polarized light)。所謂右旋或左旋，與觀察的方向有關，通常規定逆著光傳播的方向看，E 順時針方向旋轉時，稱為右旋橢圓偏振光；反之，稱為左旋橢圓偏振光。其旋向取決於相位差 φ 。當 $2m\pi < \varphi < (2m+1)\pi$ ， $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 時，為右旋橢圓偏振光；當 $(2m-1)\pi < \varphi < 2m\pi$ 時，為左旋橢圓偏振光。

(2) 線偏振光 (linear polarized light)

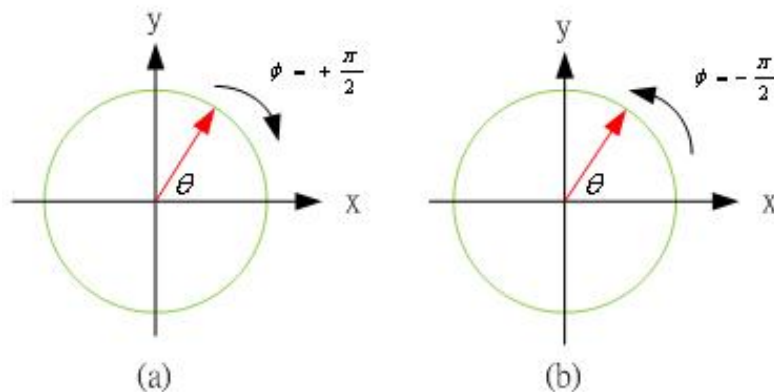
當 E_x 、 E_y 兩分量的相位差 $\varphi = m\pi$ ， $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 時，公式 (1) 為直線方程，稱為線偏振光。此時，有 $\frac{E_x}{E_y} = \pm \frac{E_{0x}}{E_{0y}}$ ，其電向量的方向保持不變，大小隨相位變化。當 m 為零或偶數時，光振動方向在 I、III 象限內；當 m 為奇數時，光振動方向在 II、IV 象限內，如圖三所示。



圖三 線偏振光，(a) m 為零或偶數，(b) m 為奇數。

(3) 圓偏振光 (circular polarized light)

當 E_x 、 E_y 的振幅相等 ($E_{0x} = E_{0y} = E_0$)，相位差 $\varphi = (2m \pm \frac{1}{2})\pi$ ， $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 時，公式 (1) 為圓方程， $E_x^2 + E_y^2 = E_0^2$ ，該光稱為圓偏振光。其電向量的大小保持不變，而方向隨時間變化。和橢圓偏振光一樣，圓偏振光的電向量也有旋轉方向，即左旋還是右旋的問題。當 $\varphi = (2m + \frac{1}{2})\pi$ 時，為右旋圓偏振光 (right-hand circular polarized light)，而當 $\varphi = (2m - \frac{1}{2})\pi$ 時，為左旋圓偏振光 (left-hand circular polarized light)，如圖四所示。



圖四 圓偏振光，(a) 為右旋圓偏振光，(b) 為左旋圓偏振光。

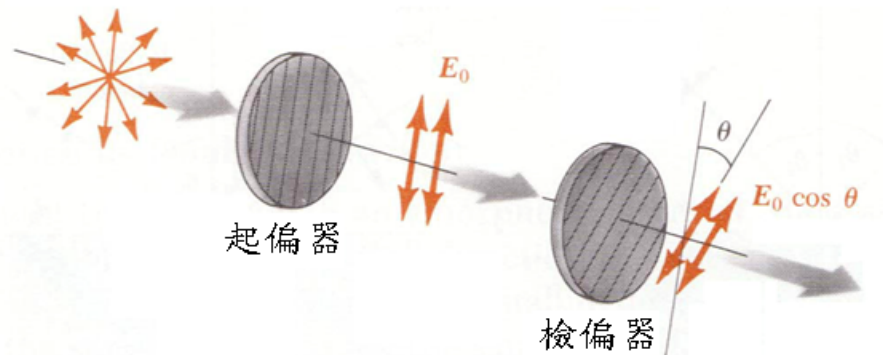
2. 偏振器 (polarizers)

能夠產生偏振光的裝置，包括儀器、元件等，稱為起偏器 (polarizer)。用來檢測偏振光及其偏振方向的裝置，叫檢偏器 (analyzer)。起偏器也可用來作檢偏器，二者無實質性的差別，只是用途不同，完全可以互換。

如圖五所示，未偏振的光線在各方向振動的機率相同，經過起偏器後，只容許振動方向與起偏器透射軸方向平行的光通過，即電場向量方向平行於起偏器的透射軸。再進入檢偏器後，若偏振光的振動方向與檢偏器之透射軸夾 θ 角時，振幅為 E_0 的偏振光通過檢偏器後，其振幅變為 $E_0 \cos \theta$ ，又經過偏振器的光強度與振幅的平方成正比，故通過偏振器前後的光強度關係可以表示為： $I(\theta) = I_0 \times \cos^2 \theta \dots\dots (2)$

上式即稱作 Malus' s Law。其中， I_0 是入射偏振光的強度，與振幅 E_0 的平方成正比，即 $I_0 \propto E_0^2$ ；而 I 是通過檢偏器後之強度，與振幅 $E_0 \cos \theta$ 的平方成正比，即 $I \propto E_0^2 \cos^2 \theta$ 。

未偏振的光線



圖五 Malus' s Law 示意圖

由公式 (2) 知：當夾角 $\theta = 0^\circ$ (電場平行於檢偏器的透振軸) 時，所有的偏振光均可以自檢偏器通過，故強度並不改變，即 $I = I_0$ ；當夾角 $\theta = 90^\circ$ (電場垂直於檢偏器的透振軸) 時，通過檢偏器之光強度為零，即 $I = 0$ ，表示當起偏器與檢偏器的軸互相垂直時，光線將無法通過檢偏器。

3. 波片 (wave plates)

由起偏器獲得的線偏振光垂直入射到由單軸晶體 (uniaxial crystals) 製成的平行平面薄片上，這時入射的線偏振光將分成兩束振動方向相互垂直的線偏振光：o 光 (ordinary ray) 和 e 光 (extraordinary ray)，兩者光向量分別沿 x 軸和 y 軸。習慣上把兩軸中的一個稱為快軸，另一個稱為慢軸，即光向量沿快軸的比沿慢軸的傳播得快。對於正單軸晶體 (positive uniaxial crystals)，o 光比 e 光傳播快，所以光軸方向是慢軸，與之垂直的是快軸。由於 o 光和 e 光在晶片速度不同，即兩者在晶體內所通過的光程不同，兩束光通過晶片後產生了一定的光程差或相位差。

設晶片的厚度為 d ，o 光和 e 光通過晶片後的光程差為 $\Delta = |n_o - n_e| d$ ，相位差為 $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} |n_o - n_e| d$ ，這種能使光向量互相垂直的兩束線偏振光產生相位相對延遲的晶片稱為波片。

現有一束線偏振光垂直射入波片，在入射面上所產生的 o 光和 e 光分量同相位，振幅分別為 A_o 和 A_e 。該兩光束穿過波片射出時，附加了一個相位延遲差 δ ，因而其合成光向量端

$$\text{點的軌跡方程為} \left(\frac{E_1}{A_o} \right)^2 + \left(\frac{E_2}{A_e} \right)^2 - 2 \frac{E_1 E_2}{A_o A_e} \cos \delta = \sin^2 \delta \dots\dots (3)$$

該式為橢圓方程。它說明輸出光的偏振態發生了變化，為橢圓偏振光。利用波片可以將橢圓偏振光轉變成線偏振光，或將線偏振光轉變成橢圓偏振光。

(1) 全波片 (Full-Wave Plate, FWP)

如果波片產生的光程差 $\Delta = m\lambda$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$, 其中 m 為整數, 這樣的波片稱為全波片。其附加相位延遲差為 $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} |n_o - n_e| d = 2m\pi$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$, 代入公式 (3) 得

$\left(\frac{E_1}{A_o} - \frac{E_2}{A_e}\right)^2 = 0$, 即 $E_1 = \frac{A_o}{A_e} E_2 = \tan \theta E_2$, 此式為直線方程, 即線偏振光通過全波片後, 其偏振狀態不變。因此將全波片放入光路中, 不改變光路的偏振狀態。全波片的厚度為 $d = \left| \frac{m}{n_o - n_e} \right| \lambda$ 。

(2) 半波片 ($\frac{\lambda}{2}$ 波片, Half-Wave Plate, HWP)

如果波片產生的光程差 $\Delta = (m + \frac{1}{2}) \lambda$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 其中 m 為整數, 這樣的波片稱為半波片。其附加相位延遲差為 $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} |n_o - n_e| d = (2m + 1)\pi$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 代入公式 (3) 得 $\left(\frac{E_1}{A_o} + \frac{E_2}{A_e}\right)^2 = 0$, 即 $E_1 = -\frac{A_o}{A_e} E_2 = \tan(-\theta) E_2$, 此式為直線方程, 即線偏振光通過半波片後, 仍為線偏振光, 只是振動面的方位較入射光轉過了 2θ 角。當 $\theta = 45^\circ$ 時, 振動面轉過 90° 。半波片的厚度為 $d = \left| \frac{2m + 1}{n_o - n_e} \right| \frac{\lambda}{2}$ 。

(3) $\frac{1}{4}$ 波片 ($\frac{\lambda}{4}$ 波片, Quarter-Wave Plate, QWP)

如果波片產生的光程差 $\Delta = (m + \frac{1}{4}) \lambda$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 其中 m 為整數, 這樣的波片稱為 $\frac{1}{4}$ 波片。其附加相位延遲差為 $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} |n_o - n_e| d = (2m + 1) \frac{\pi}{2}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 代入公式 (3) 得 $\frac{E_1^2}{A_o^2} + \frac{E_2^2}{A_e^2} = 1$, 此式是一個標準橢圓方程, 其長、短半軸長分別為 A_o 和 A_e 。線偏振光通過 $\frac{1}{4}$ 波片後, 射出光將變為長、短半軸等於 A_o 和 A_e 的橢圓偏振光。當 $\theta = 45^\circ$ 時, $A_o = A_e = \frac{A}{\sqrt{2}}$, 射出光為圓偏振光, 其方程為 $E_1^2 + E_2^2 = \frac{A^2}{2}$, $\frac{1}{4}$ 波片的厚度為 $d = \left| \frac{2m + 1}{n_o - n_e} \right| \frac{\lambda}{4}$ 。

【實驗器材】

線偏振 He-Ne 雷射 (附角度盤, 波長 = 632.8nm)、檢偏鏡 (附角度盤)、 $\frac{\lambda}{4}$ 波片 (第零階、材質: 石英)、 $\frac{\lambda}{2}$ 波片 (第零階、材質: 石英)、光度計 (OPTOMETER S370)、圓轉檯 (附角度盤)、放大鏡、光具座
註: 石英 (quartz) 是正單軸晶體, $n_o = 1.5443$, $n_e = 1.5534$ 。

【注意事項】

1. 光度計因靈敏度高，故讀值跳動不停。記錄讀值速度要快，看到就記不要等。
2. 轉動檢偏鏡時，務必‘精確’置於待測角度上，避免繪出的圖形偏轉。
3. 波片是高價光學元件，請小心拿取，並避免指紋留在上面。

【實驗步驟】

1. Malus' s Law



圖六 Malus' s Law 實驗裝置圖

(1) 如圖六所示，檢偏鏡暫時取下，調整雷射光路徑，大略與光具座平行，雷射光打在光度計的正中央。開啟光度計並設定在工作狀態（操作步驟寫在機殼上）。

(2) 放回檢偏鏡，使雷射光點落於鏡中心，其反射光點儘量靠近雷射輸出孔，用放大鏡看游標尺刻度，使檢偏鏡角度精確置於 90 度。

註：雷射光的反射光點不可射入雷射，以免影響其偏振性。

(3) 緩慢轉動雷射管，使光度計讀值最小（nW 以下），此時雷射光偏振面垂直桌面。固定雷射管並記錄雷射管轉盤角度。

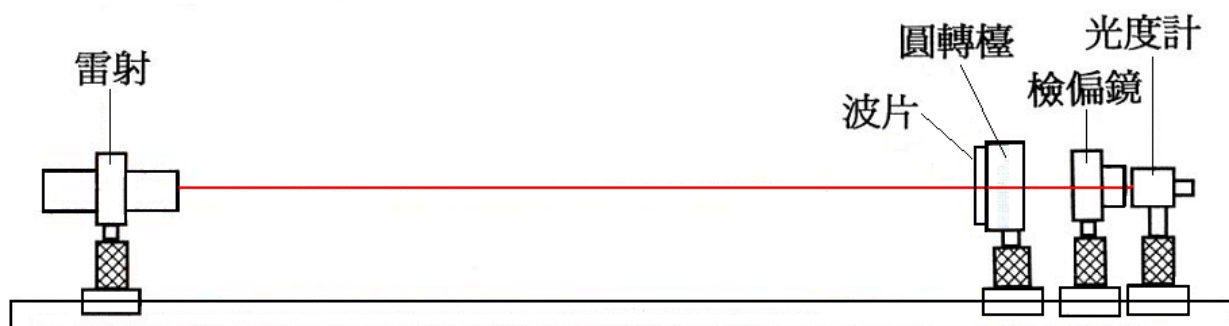
註：雷射管的角度不管向左或向右，光度計的讀值都變大，才是最小值。此步驟請確實操作，以免造成繪出的圖形平移。

(4) 檢偏鏡由 0 度起，每 5 度記錄一次光度計讀值至 360 度止。

(5) 以 θ 為 X 軸、歸一化的光度計讀值 ($\frac{\text{讀值}}{\text{最大讀值}}$) 為 Y 軸，繪曲線圖於方格紙上，並與

‘ $\cos^2 \theta$ ’ 函數曲線對照。

2. 觀察 $\frac{\lambda}{4}$ 波片對線偏振光的影響



圖七 波片實驗裝置圖

(1) 如圖七所示，檢偏鏡角度置於 90 度，使光度計讀值最小，再將 $\frac{\lambda}{4}$ 波片安裝在圓轉檯上，使雷射光點落於鏡中心，其反射光點儘量靠近雷射輸出孔正下方，轉動 $\frac{\lambda}{4}$ 波片使波片外環上的刻痕（波片光軸方向）大致垂直桌面，即與起偏鏡光軸方向平行，儘量使光度計讀值減小，固定轉盤，微調其角度使光度計讀值最小。（nW 以下）

註：雷射在光具座的最左邊、波片在最右邊，相離較遠則波片面與雷射光較垂直。

註：波片的角度不管向左或向右，光度計的讀值都變大，才是最小值。此步驟請確實操作，以免影響實驗結果，導致重複該步驟 N 次。

(2) 檢偏鏡角度置於 0 度，記錄光度計讀值 I_0 ；順時針轉雷射管 45 度，記錄雷射管轉盤角度。

(3) 檢偏鏡由 0 度起，每 5 度記錄光度計讀值至 360 度止。

註：起偏鏡在順時針 45 度時，線偏振轉換成圓偏振，光度計讀值應為常數，可借此現象估計實驗裝置是否已調整妥當。因為產生圓偏極光，故光度計的讀值變化應該不大，變化若大於 10%，系統必須重調，並重作一遍。

(4) 由理論知： $E = \sqrt{2I_0}$ （雷射光入射波片的振幅）， $E_{//} = E \cdot \cos \theta$ ， $E_{\perp} = E \cdot \sin \theta$

由實驗數據知： $E_{//} = \sqrt{I(0^\circ) + I(180^\circ)}$ ， $E_{\perp} = \sqrt{I(90^\circ) + I(270^\circ)}$

將兩者比較，可預先估計實驗數據是否正確。

(5) 順時針轉雷射管與波片光軸夾角 15 度，記錄雷射管轉盤角度，並重複步驟 (3) (4)。

(6) 順時針轉雷射管與波片光軸夾角 30 度，記錄雷射管轉盤角度，並重複步驟 (3) (4)。

(7) 參考【實驗數據處理】，將步驟 (3) (5) (6) 的數據繪圖，並解釋圖形產生的原因。

3. 觀察 $\frac{\lambda}{2}$ 波片對線偏振光的影響

(1) 將 $\frac{\lambda}{4}$ 波片取下，檢偏鏡角度置於 90 度，緩慢轉動雷射管，使光度計讀值最小後，換上

$\frac{\lambda}{2}$ 波片。

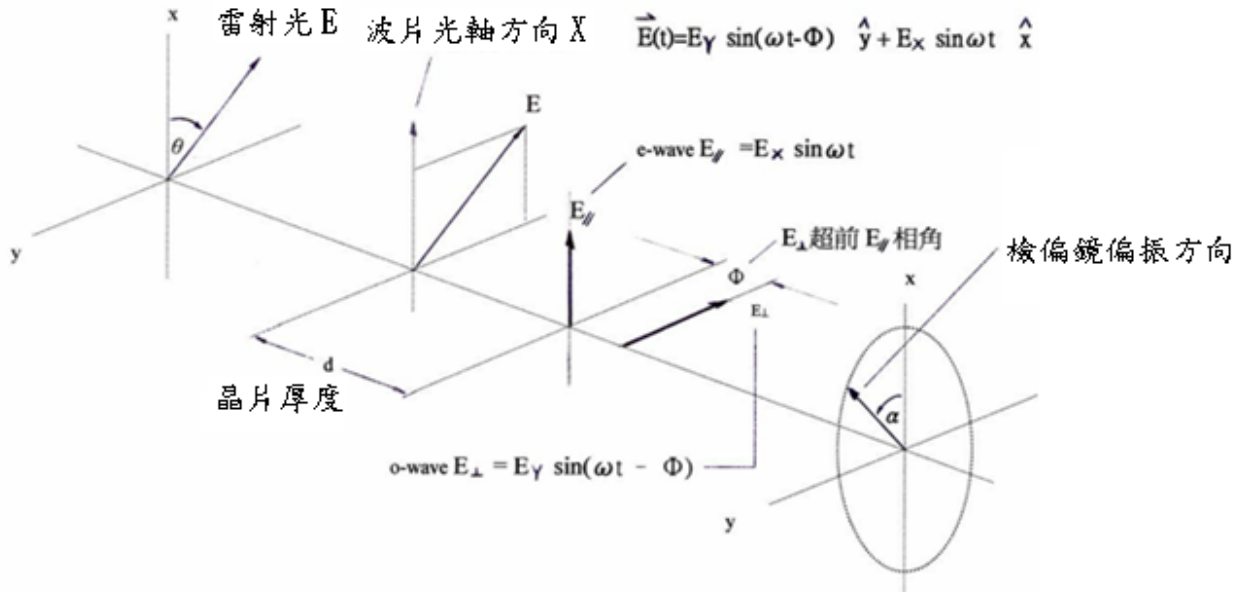
(2) 轉動 $\frac{\lambda}{2}$ 波片使波片外環上的刻痕（波片光軸方向）與桌面垂直，微調其角度使光度計讀值最小（nW 以下）。

(3) 雷射管順時針轉 10 度，再旋轉檢偏鏡使光度計讀值最小，記錄檢偏鏡旋轉的方向與角度。

註：+ 代表順時針方向、- 代表逆時針方向。

(4) 重覆步驟 (3)，至雷射管順時針轉 80 度止，解釋各角度間的關聯與原因。

【實驗數據處理】



圖八 波片實驗電場向量示意圖

1. 由 Malus' s Law 知：線偏極光 [$E(t) = A \sin \omega t$] 通過檢偏鏡，若二者間的夾角為 θ ，則光度計讀值為 $\langle I \rangle = \frac{1}{2} A^2 \cos^2 \theta$ 。

2. 線偏極光通過 $\frac{\lambda}{4}$ 波片時，因光在晶體中快慢軸有不同的速度，將電場 E 分裂成兩部份：

$$E_x(t) = E_{\parallel} \sin \omega t \hat{x} \text{ 及 } E_y(t) = E_{\perp} \sin(\omega t - \varphi) \hat{y} \dots\dots (4)$$

偏振面分別為 x 軸、 y 軸，二者間相差為 φ ， $E_{\parallel} = E \cos \theta$ ， $E_{\perp} = E \sin \theta$

3. 晶片的材質和厚度控制相差 φ ，相差 φ 的大小決定線偏極光通過晶體後為何種橢圓偏極光。

4. 實驗使用的晶体為 $\frac{\lambda}{4}$ 波片，故相差 φ 等於 90 度，代入公式 (4) 中得：

$$\vec{E}(t) = E_{\parallel} \sin \omega t \hat{x} - E_{\perp} \cos \omega t \hat{y} \dots\dots (5)$$

5. 公式 (5) 代表一個電場軌跡在標準位置上的橢圓 (參考圖八)，且晶軸方向即為 x 軸。

6. 當檢偏鏡與 x 軸夾角為 α ，由 Malus' s Law 知，通過檢偏鏡後光度計讀值 $I(\alpha)$ 為

$$I(\alpha) = \frac{1}{2} (E_{\parallel} \cos \alpha)^2 + \frac{1}{2} (E_{\perp} \sin \alpha)^2 \dots\dots (6)$$

7. 經由解析幾何對公式 (6) 的複雜換算，可以求得橢圓偏極光在角度 α 上的電場分量

$$E(\alpha) = \frac{E_{\parallel} \cdot E_{\perp}}{\sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\perp}^2 - 2 \cdot I(\alpha)}} \dots\dots (7)$$

$$\text{其中 } E_{\parallel} = \sqrt{I(0^\circ) + I(180^\circ)}, \quad E_{\perp} = \sqrt{I(90^\circ) + I(270^\circ)}$$

8. 電場的橢圓軌跡直角座標方程式為 $\frac{X^2}{E_{\parallel}^2} + \frac{Y^2}{E_{\perp}^2} = 1 \dots\dots (8)$

其中 $E_{\parallel} = E \cdot \cos \theta$ ， $E_{\perp} = E \cdot \sin \theta$ ，橢圓軌跡等同於公式 (5) 一向量參數方程式

9. 將測量值 [公式 (7)] 與理論值 [公式 (8)] 的結果同繪於一張方格紙上，比較其不同並解釋原因。

10. 由石英及記錄的資料，分析實驗中的橢圓偏極光是左旋還是右旋？

【問題】

1. 請解釋單軸晶體 (uniaxial crystals)、雙軸晶體 (biaxial crystals)、正晶體 (positive crystals)、負晶體 (negative crystals)、雙折射晶體 (birefringent crystals)。
2. 以石英材質的晶體為例，繪圖說明如何製作 $\frac{\lambda}{2}$ 波片和 $\frac{\lambda}{4}$ 波片？
3. 測量橢圓偏振時，在 θ 角下光度計的讀值代表什麼？

【參考資料】

1. 幾何光學，葉玉堂、饒建珍、肖峻編著，郭浩中校訂，台北市，五南圖書出版股份有限公司，2008年12月，CH 4.3、7.6.1-7.6.2。
2. 雷射原理與量測概論，楊國輝、黃宏彥編著，台北市，五南圖書出版股份有限公司，2008年12月，CH 2-5。
3. 光學系統設計進階篇，許阿娟、朱嘉雯、林佳芬、陳志隆編著，fourth version，2002版，第十二章 偏振。
4. Optics, by Eugene Hecht, 4th Edition, Ch 8.1-8.4、8.7。
5. 國立中央大學，普通物理實驗講義，光的偏振性質。
6. 崑山科技大學，物理實驗，線偏振光特性量測實驗。
7. 天主教輔仁大學物理學系，光學實驗講義，偏振實驗。
8. 偏振，國立台北科技大學機械系丁振卿，May 22 2012。